単杭の応答変位法の解法（例）

単杭の応答変位法の基本式（力の釣合式）は，

$$\frac{d^2}{dz^2}\left(EI\frac{d^2y}{dz^2}\right)+\frac{d}{dz}\left(N\frac{dy}{dz}\right)+k_hB\left(y-y_G\right)=0 \qquad (1)$$

ここに，EI は杭の曲げ剛性（以後，便宜上，e と記す），N は杭の軸力（圧縮が正），y は杭の変位，B は杭径，z は地盤の深度，y_G は地盤変位，k_h は水平地盤反力係数．(1)式の左辺第 2 項は，杭の軸力 N による付加曲げの影響を考慮したもので，省略される場合が多い．

(1)式を差分法で解ける形に展開すると，

$$\frac{d^2e}{dz^2}\frac{d^2y}{dz^2}+2\frac{de}{dz}\frac{d^3y}{dz^3}+e\frac{d^4y}{dz^4}+\frac{dN}{dz}\frac{dy}{dz}+N\frac{d^2y}{dz^2}+k_hBy=k_hBy_G \qquad (2)$$

杭頭から杭先端までを，n 個の節点（節点番号 $i=0,1,2,...,n-1$，間隔 Δz ）に離散化する．(2)式において，1-4 階微分に対して，2 次精度の中心差分

$$\frac{dy}{dz}=\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2\Delta z} \qquad (3\text{-}1)$$

$$\frac{d^2y}{dz^2}=\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{\Delta z^2} \qquad (3\text{-}2)$$

$$\frac{d^3y}{dz^3}=\frac{y_{i+2}-2y_{i+1}+2y_{i-1}-y_{i-2}}{2\Delta z^3} \qquad (3\text{-}3)$$

$$\frac{d^4y}{dz^4}=\frac{y_{i+2}-4y_{i+1}+6y_i-4y_{i-1}+y_{i-2}}{\Delta z^4} \qquad (3\text{-}4)$$

を適用し，整理すると，(4)式を得る．

$$a_{1i}y_{i-2}+a_{2i}y_{i-1}+a_{3i}y_i+a_{4i}y_{i+1}+a_{5i}y_{i+2}=\gamma_i y_{Gi} \qquad (4)$$

ここに，

$$a_{1i}=-\frac{e_{i+1}-e_{i-1}}{2\Delta z^4}+\frac{e_i}{\Delta z^4} \qquad (5\text{-}1)$$

$$a_{2i}=\frac{2e_{i+1}-6e_i}{\Delta z^4}-\frac{N_{i+1}-N_{i-1}}{4\Delta z^2}+\frac{N_i}{\Delta z^2} \qquad (5\text{-}2)$$

$$a_{3i}=\frac{-2e_{i+1}+10e_i-2e_{i-1}}{\Delta z^4}-\frac{2N_i}{\Delta z^2}+\gamma_i \qquad (5\text{-}3)$$

$$a_{4i}=\frac{-6e_i+2e_{i-1}}{\Delta z^4}+\frac{N_{i+1}-N_{i-1}}{4\Delta z^2}+\frac{N_i}{\Delta z^2} \qquad (5\text{-}4)$$

$$a_{5i}=\frac{e_{i+1}-e_{i-1}}{2\Delta z^4}+\frac{e_i}{\Delta z^4} \qquad (5\text{-}5)$$

$$\gamma_i=k_{hi}B \qquad (5\text{-}6)$$

ただし，杭頭（$i=0$）と杭先端（$i=n-1$）では，1 階微分の中心差分は，前進差分あるいは後退差分により置換し，(6), (7)式とする．

杭頭（$i=0$）

$$a_{10}=\frac{-e_1+2e_0}{\Delta z^4} \tag{6-1}$$

$$a_{20}=\frac{2e_1-6e_0}{\Delta z^4}-\frac{N_1-3N_0}{2\Delta z^2} \tag{6-2}$$

$$a_{30}=\frac{6e_0}{\Delta z^4}-\frac{2N_0}{\Delta z^2}+\gamma_0 \tag{6-3}$$

$$a_{40}=\frac{-2e_1-2e_0}{\Delta z^4}+\frac{N_1+N_0}{2\Delta z^2} \tag{6-4}$$

$$a_{50}=\frac{e_1}{\Delta z^4} \tag{6-5}$$

$$\gamma_0=k_{h0}B \tag{6-6}$$

杭先端（$i=n-1$）

$$a_{1(n-1)}=\frac{e_{n-2}}{\Delta z^4} \tag{7-1}$$

$$a_{2(n-1)}=\frac{-2e_{n-2}-2e_{n-1}}{\Delta z^4}+\frac{N_{n-2}+N_{n-1}}{2\Delta z^2} \tag{7-2}$$

$$a_{3(n-1)}=\frac{6e_{n-1}}{\Delta z^4}-\frac{2N_{n-1}}{\Delta z^2}+\gamma_{n-1} \tag{7-3}$$

$$a_{4(n-1)}=\frac{2e_{n-2}-6e_{n-1}}{\Delta z^4}-\frac{N_{n-2}-3N_{n-1}}{2\Delta z^2} \tag{7-4}$$

$$a_{5(n-1)}=\frac{-e_{n-2}+2e_{n-1}}{\Delta z^4} \tag{7-5}$$

$$\gamma_{n-1}=k_{h(n-1)}B \tag{7-6}$$

また，杭頭と杭先端の近傍では，境界条件から，(4)式は，(8)-(11)式で表される．

a) 杭頭回転拘束（固定）

杭頭（$i=0$）において，

撓み角 $\dfrac{dy}{dz}=\dfrac{y_1-y_{-1}}{2\Delta z}=0 \quad \rightarrow \quad y_{-1}=y_1$

せん断力 $Q_0=-EI\dfrac{d^3y}{dz^3}=-e_0\dfrac{y_2-2y_1+2y_{-1}-y_{-2}}{2\Delta z^3}=-e_0\dfrac{y_2-y_{-2}}{2\Delta z^3} \quad \rightarrow \quad y_{-2}=y_2+\dfrac{2Q_0}{e_0}\Delta z^3$

より，

1) $i=0$ に対して，

$$a_{30}y_0+\left(a_{20}+a_{40}\right)y_1+\left(a_{10}+a_{50}\right)y_2=\gamma_0 y_{G0}-a_{10}\frac{2Q_0}{e_0}\Delta z^3 \tag{8-1}$$

2) $i=1$ に対して，

$$a_{21}y_0+\left(a_{11}+a_{31}\right)y_1+a_{41}y_2+a_{51}y_3=\gamma_1 y_{G1} \tag{8-2}$$

b) 杭頭モーメント拘束

杭頭（$i=0$）において，

曲げモーメント $M_0=-EI\dfrac{d^2y}{dz^2}=-e_0\dfrac{y_1-2y_0+y_{-1}}{\Delta z^2}$ → $y_{-1}=2y_0-y_1-\dfrac{M_0}{e_0}\Delta z^2$

せん断力 $Q_0=-EI\dfrac{d^3y}{dz^3}=-e_0\dfrac{y_2-2y_1+2y_{-1}-y_{-2}}{2\Delta z^3}$

→ $y_{-2}=y_2-4y_1+4y_0-\dfrac{2M_0}{e_0}\Delta z^2+\dfrac{2Q_0}{e_0}\Delta z^3$

より，

1) $i=0$ に対して，

$$\begin{aligned}&\left(4a_{10}+2a_{20}+a_{30}\right)y_0+\left(-4a_{10}-a_{20}+a_{40}\right)y_1+\left(a_{10}+a_{50}\right)y_2\\&=\gamma_0 y_{G0}+\left(2a_{10}+a_{20}\right)\frac{M_0}{e_0}\Delta z^2-2a_{10}\frac{Q_0}{e_0}\Delta z^3\end{aligned} \tag{9-1}$$

2) $i=1$ に対して，

$$\left(2a_{11}+a_{21}\right)y_0+\left(-a_{11}+a_{31}\right)y_1+a_{41}y_2+a_{51}y_3=\gamma_1 y_{G1}+a_{11}\frac{M_0}{e_0}\Delta z^2 \tag{9-2}$$

c) 杭先端フリー

杭先端（$i=n-1$）において，

曲げモーメント $M_{n-1}=-e_{n-1}\dfrac{y_{n-2}-2y_{n-1}+y_n}{\Delta z^2}=0$ → $y_n=2y_{n-1}-y_{n-2}$

せん断力 $Q_{n-1}=-e_{n-1}\dfrac{y_{n+1}-2y_n+2y_{n-2}-y_{n-3}}{2\Delta z^3}=0$ → $y_{n+1}=4y_{n-1}-4y_{n-2}+y_{n-3}$

より，

1) $i=n-2$ に対して，

$$\begin{aligned}&a_{1(n-2)}y_{n-4}+a_{2(n-2)}y_{n-3}+\left(a_{3(n-2)}-a_{5(n-2)}\right)y_{n-2}\\&+\left(a_{4(n-2)}+2a_{5(n-2)}\right)y_{n-1}=\gamma_{n-2}y_{G(n-2)}\end{aligned} \tag{10-1}$$

2) $i=n-1$ に対して

$$\left(a_{1(n-1)}+a_{5(n-1)}\right)y_{n-3}+\left(a_{2(n-1)}-a_{4(n-1)}-4a_{5(n-1)}\right)y_{n-2} \\ +\left(a_{3(n-1)}+2a_{4(n-1)}+4a_{5(n-1)}\right)y_{n-1}=\gamma_{n-1}y_{G(n-1)} \tag{10-2}$$

d) 杭先端ピン

杭先端（$i=n-1$）において，

変位 $y_{n-1}=0$

曲げモーメント $M_{n-1}=-e_{n-1}\dfrac{y_{n-2}-2y_{n-1}+y_n}{\Delta z^2}=-e_{n-1}\dfrac{y_{n-2}+y_n}{\Delta z^2}=0 \quad \rightarrow \quad y_n=-y_{n-2}$

より，

1) $i=n-3$ に対して，

$$a_{1(n-3)}y_{n-5}+a_{2(n-3)}y_{n-4}+a_{3(n-3)}y_{n-3}+a_{4(n-3)}y_{n-2}=\gamma_{n-3}y_{G(n-3)} \tag{11-1}$$

2) $i=n-2$ に対して

$$a_{1(n-2)}y_{n-4}+a_{2(n-2)}y_{n-3}+\left(a_{3(n-2)}-a_{5(n-2)}\right)y_{n-2}=\gamma_{n-2}y_{G(n-2)} \tag{11-2}$$

境界条件 a)ないし b)と c)ないし d)の組み合わせに応じて，(4)式および(8)-(11)式から必要な式を連立させると，解くべき多元連立 1 次方程式は，(12)式の形に表される．

$$\mathbf{Ay}=\mathbf{g} \tag{12}$$

ここに，

A ：(5)-(7)式の $a_{1i},a_{2i},a_{3i},a_{4i},a_{5i}$ から決まる要素を持つ正方行列

y ：求めるべき杭変位 y_i を要素に持つ列ベクトル

g ：$\gamma_i y_{Gi}$ と(8), (9)式右辺（$a_{10},a_{20},a_{11},M_0,Q_0,e_0,\Delta z$）から決まる要素を持つ列ベクトル

※境界条件 c) 杭先端フリーの場合：$i=0,1,2,\ldots,n-1$（要素数 n）
※境界条件 d) 杭先端ピンの場合：$i=0,1,2,\ldots,n-2$（要素数 $n-1$）

(12)式を解いて，杭変位 $\{y_i\}$ を得る．

※(12)式は，対称行列とはならない．ここでは，特異値分解法により求解する．

得られた杭変位 $\{y_i\}$ から，撓み角 θ, 曲げモーメント M, せん断力 Q を順次，1 階微分により求める．

$$\theta=\frac{dy}{dz},\quad M=-EI\frac{d\theta}{dz},\quad Q=\frac{dM}{dz} \tag{13}$$

この微分演算も，ここでは，差分法による．差分スキームは，(14)式とする．

節点 $i=0$（杭頭）: 1 次精度の前進差分　$\theta_0 = \dfrac{y_1 - y_0}{\Delta z}$　(14-1)

節点 $i=1$: 3 次精度の前進差分　$\theta_1 = \dfrac{-y_3 + 6y_2 - 3y_1 - 2y_0}{6\Delta z}$　(14-2)

節点 $i=2,...,n-3$: 4 次精度の中心差分　$\theta_i = \dfrac{-y_{i+2} + 8y_{i+1} - 8y_{i-1} + y_{i-2}}{12\Delta z}$　(14-3)

節点 $i=n-2$: 3 次精度の後退差分　$\theta_{n-2} = \dfrac{2y_{n-1} + 3y_{n-2} - 6y_{n-3} + y_{n-4}}{6\Delta z}$　(14-4)

節点 $i=n-1$（杭先端）: 1 次精度の後退差分　$\theta_{n-1} = \dfrac{y_{n-1} - y_{n-2}}{\Delta z}$　(14-5)

以上は，系（杭体と地盤ばね）が線形（弾性）の場合の解法例である．これが非線形の場合，(12)式を増分形で表示して（$\mathbf{A}\Delta\mathbf{y} = \Delta\mathbf{g}$），適切な杭体の曲げモーメント－曲率（$M$-$\phi$）関係と地盤ばねの荷重－杭地盤間相対変位（$p$-$y$）関係を設定し，曲げ剛性 EI と水平地盤反力係数 k_h の接線勾配を用いて，荷重増分解析（プッシュオーバー解析）を行う．あるいは，等価線形解析を行う場合は，EI と k_h の割線勾配を用いて，反復収束計算（イタレーション）により解を求める．この際，EI と k_h の初期値は，弾性時の値を用いる．